

## Μια απλή διάταξη για την επίδειξη φαινομένων που σχετίζονται με την εξίσωση Bernoulli

### Εισαγωγή

Η εξίσωση Bernoulli είναι μία από τις βασικότερες εξισώσεις στη ρευστομηχανική των ιδανικών ρευστών αποτελώντας, ουσιαστικά, μια έκφραση της διατήρησης της ενέργειας στη ροή του ρευστού.

Σύμφωνα με την εξίσωση για κάθε σημείο μίας φλέβας ενός ιδανικού ρευστού ισχύει (Ιωάννου κ.ά., 2015):

$$p + 1/2\rho v^2 + \rho gy = \text{σταθερό} \quad (1)$$

όπου:

p: η πίεση στο σημείο,

$\rho$ : η πυκνότητα του ρευστού,

v: η ταχύτητα του ρευστού στο σημείο,

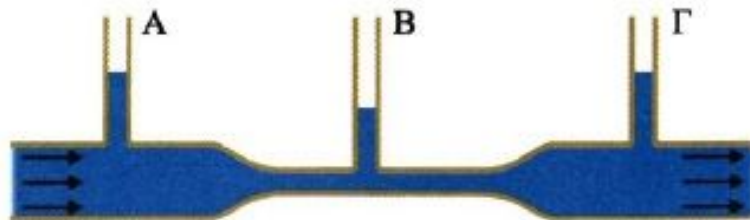
g: η επιτάχυνση της βαρύτητας,

y: η κατακόρυφη απόσταση του σημείου από ένα επίπεδο αναφοράς.

Στην περίπτωση οριζόντιου σωλήνα η σχέση (1) παίρνει την μορφή:

$$p + 1/2\rho v^2 = \text{σταθερό} \quad (2)$$

Στην εικόνα 1 (Ιωάννου κ.ά., 2015) αποτυπώνεται οριζόντιος σωλήνας, ο οποίος διαρρέεται από νερό. Η διαφορετική στάθμη του νερού στους κατακόρυφους σωλήνες A, B και Γ σχετίζεται άμεσα με τη μικρότερη πίεση στο σημείο B σε σχέση με εκείνη των σημείων A και Γ.

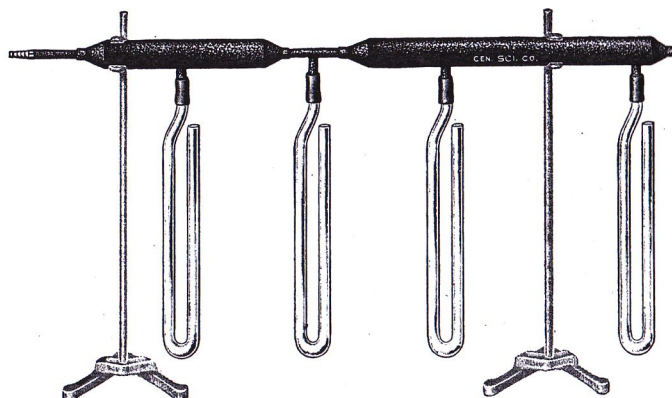


Εικόνα 1. Εφαρμογή της εξίσωσης Bernoulli σε οριζόντιο σωλήνα.

### Πειραματική διάταξη για την επίδειξη φαινομένων σχετικά με την εξίσωση Bernoulli

Ο αμερικανικός κατασκευαστικός οίκος επιστημονικών οργάνων Central Scientific Company (CENCO) διέθετε στα μέσα του 20<sup>ου</sup> αιώνα μια διάταξη εμπνευσμένη από την εικόνα 1. Η διάταξη της εικόνας 2, με κωδικό 76462, ονομάζεται Bernoulli's principle apparatus, κόστιζε 12\$, έχει μήκος περίπου 1,2 m (3,5 feet) και είναι κατασκευασμένη από ορείχαλκο (CENCO, 1941). Στο μεσαίο τμήμα ο σωλήνας παρουσιάζει μια στένωση. Στο ένα άκρο του σωλήνα μπορεί να συνδεθεί παροχή αέρα. Υπάρχουν συνολικά 4 οπές στο σωλήνα (μία στο τμήμα με τη στένωση, μία στο αρχικό πλατύτερο τμήμα και δύο στο τελευταίο πλατύτερο τμήμα) στις οποίες μπορούν να συνδεθούν γυάλινα ανοικτά μανόμετρα, στα οποία τοποθετείται νερό που έχει χρωματιστεί για

ευκολότερη παρατήρηση της ανύψωσής του από τους μαθητές και, ενδεχομένως, λήψη μετρήσεων. Η όλη διάταξη στηρίζεται σε κατάλληλους ορθοστάτες.



76462 shown on supports and with  
No. 76463 Manometers

**Εικόνα 2.** Bernoulli's principle apparatus από τον εμπορικό κατάλογο της CENCO.

Όταν κατευθυνθεί ρεύμα αέρα εντός της διάταξης η ανύψωση του νερού στα μανόμετρα δεν είναι η ίδια και συγκεκριμένα σε εκείνο που έχει συνδεθεί στη στενότητα είναι σαφώς μικρότερη (Εικόνα 3), όπως προβλέπεται από τη θεωρία.



**Εικόνα 3.** Η διάταξη της CENCO σε λειτουργία.

Η διάταξη έχει χρησιμοποιηθεί ευρέως στη δευτεροβάθμια και τριτοβάθμια εκπαίδευση στις ΗΠΑ και όχι μόνο, με αποτέλεσμα να έχουν αναδειχθεί και κάποια μειονεκτήματα. Το κυριότερο, μάλλον, από αυτά είναι πως η διάταξη χρησιμοποιεί τα γυάλινα μανόμετρα τα οποία δεν είναι πάντα διαθέσιμα ενώ παράλληλα είναι ιδιαίτερα ευπαθή και εύθραυστα με αποτέλεσμα να γίνεται δύσκολη η χρήση αλλά και η μεταφορά της διάταξης (Chafee & Sieradzan, 1989). Έχει προταθεί,

λοιπόν, τα μανόμετρα να αντικατασταθούν με... κεριά. Η διάταξη τοποθετείται στο ύψος του πάγκου, χωρίς ορθοστάτες και δίπλα στις οπές τοποθετούνται αναμμένα κεριά. Όταν παροχετευθεί αέρας εντός της διάταξης τότε η φλόγα των κεριών που βρίσκονται στις οπές των πλατύτερων τμημάτων κλίνει σαφώς μακριά από τη διάταξη και συχνά σβήνει, ενώ η φλόγα που βρίσκεται δίπλα στο στενό τμήμα κλίνει προς τη διάταξη και μάλιστα εισέρχεται στην οπή. Εναλλακτικά, μπορούν τα κεριά να βρίσκονται αρχικά μακριά από τις οπές και να πλησιάζουν σταδιακά ώστε η παρατήρηση να έχει μεγαλύτερη διάρκεια (Chafee & Sieradzan, 1989). Η ιδέα παρουσιάζει απλότητα και επιδεικνύει σαφώς το φαινόμενο. Η έλλειψη δυνατότητας ποσοτικών μετρήσεων προσμετρείται στα μειονεκτήματα μόνο αν η λήψη μετρήσεων ανήκει στους διδακτικούς στόχους του εκπαιδευτικού.

### **Κατασκευάζοντας μία απλή διάταξη**

Προφανώς σε ελάχιστα σχολικά εργαστήρια υπάρχει μια παρόμοια διάταξη με αυτή της CENCO, ενώ θα ήταν ιδιαίτερα χρήσιμη στη φυσική προσανατολισμού της Γ' τάξης. Το κενό αυτό προσπαθεί να καλύψει η διάταξη που προτείνουμε. Για την κατασκευή χρειάζονται τα εξής υλικά, που διαθέτει οποιοδήποτε κατάστημα με υδραυλικά είδη με συνολικό κόστος που δεν υπερβαίνει τα 9 ευρώ:

Σωλήνας PVC Φ63, μήκος 1m,

Σωλήνας PVC Φ32, μήκος 1m,

2 συστολές Φ63/50,

2 συστολές Φ50/32.

Οι συστολές είναι ειδικές υποδοχές που επιτρέπουν σε δύο σωλήνες διαφορετικής διατομής να ενωθούν μεταξύ τους. Με ένα σιδηροπρίονο κόβονται δύο τμήματα μήκους περίπου 40cm από το σωλήνα Φ63 και ένα τμήμα ίδιου μήκους από το σωλήνα Φ32. Στο μέσο κάθε τμήματος ανοίγεται μια οπή διαμέτρου 1cm με κατάλληλο τρυπάνι. Στη συνέχεια τοποθετείται μία συστολή Φ63/50 στο ένα άκρο κάθε τμήματος του σωλήνα Φ63. Η τοποθέτηση προϋποθέτει θέρμανση του σωλήνα με φλόγιστρο μέχρι να μαλακώσει και στη συνέχεια τοποθέτηση της συστολής με κατάλληλη πίεση στο μαλακό άκρο. Στη συνέχεια τοποθετούνται οι συστολές Φ50/32 εντός των συστολών Φ63/50 (το αποτέλεσμα φαίνεται στην εικόνα 4). Προτείνεται η χρήση σιλικόνης για μόνιμη και αεροστεγή εφαρμογή. Η τοποθέτηση των άκρων του σωλήνα Φ32 στις δύο συστολές ολοκληρώνει το βασικό τμήμα της διάταξης. Χωρίς να είναι απολύτως απαραίτητο και μόνο αν δεν ενδιαφέρει η εύκολη φορητότητα ή αποσυναρμολόγηση της διάταξης, μπορεί να τοποθετηθεί σιλικόνη ανάμεσα στις συστολές και το σωλήνα Φ32 για καλύτερη στεγανοποίηση.

Επίσης, χρειάζονται 3 πώματα για δοκιμαστικούς σωλήνες και γυάλινος σωλήνας διαμέτρου 5mm από τον οποίον πρέπει να κόψουμε 3 κομμάτια μήκους περίπου 5cm. Η κοπή μπορεί να γίνει σε οποιοδήποτε κατάστημα πώλησης υαλοπινάκων. Στη συνέχεια ανοίγονται στα 3 πώματα οπές κατάλληλης διαμέτρου ώστε να τοποθετηθεί εκεί ο γυάλινος σωλήνας. Οι οπές ανοίγονται με φελλοτρυπητήρα (Μπισδικιάν & Μολοχίδης 2000), που διαθέτουν σχεδόν όλα τα σχολικά εργαστήρια. Τα έτοιμα πώματα με τους σωλήνες σφηνώνονται στις οπές διαμέτρου 1cm που έχουν ανοιχθεί στα 3 τμήματα της διάταξης, η οποία έτσι ολοκληρώνεται (Εικόνα 5). Η στήριξη του συνόλου είναι εύκολη και μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους. Προαιρετικά, η διάταξη μπορεί να βαφτεί, αν και στην περίπτωσή μας το αισθητικό αποτέλεσμα υπήρξε αμφίβολο...



**Εικόνα 4.** Το ένα από τα δύο πλατύτερα τμήματα της διάταξης σε τελική μορφή.



**Εικόνα 5.** Η τελική μορφή της διάταξης. Η μεσαία οπή έχει συνδεθεί με μανόμετρο.

#### **Χρήση της διάταξης, σχόλια και αποτελέσματα**

Στο ένα άκρο της διάταξης τοποθετείται πιστολάκι για τα μαλλιά, ή οποιαδήποτε άλλη συσκευή παροχής αέρα. Μπροστά στους γυάλινους σωλήνες μπορούν, όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, να τοποθετηθούν κεριά. Επίσης, μπορούν οι σωλήνες να συνδεθούν με τη βοήθεια ελαστικού σωλήνα με το άκρο ανοικτού μανόμετρου.

Στην περίπτωση χρήσης κεριών και αφού ξεκινήσει η παροχή αέρα στη διάταξη παρατηρείται πως η φλόγα του κεριού στο πρώτο πλατύ τμήμα απομακρύνεται από το σωλήνα και ενίοτε σβήνει, το οποίο είναι ένδειξη πίεσης μεγαλύτερης της ατμοσφαιρικής (Εικόνα 6).



**Εικόνα 6.** Η φλόγα του κεριού απομακρύνεται από τον πρώτο σωλήνα.

Η φλόγα του κεριού στη στένωση τείνει να εισέλθει στο σωλήνα, ένδειξη πίεσης μικρότερης της ατμοσφαιρικής (Εικόνα 7).



**Εικόνα 7.** Η φλόγα του κεριού τείνει να εισέλθει στο δεύτερο σωλήνα.

Αντίθετα, η φλόγα στο τελευταίο πλατύ τμήμα συνεχίζει να συμπεριφέρεται όπως πριν την έναρξη παροχής του αέρα (Εικόνα 8). Τα πρώτα δύο δεδομένα φαίνεται να συμφωνούν ποιοτικά με την εξίσωση Bernoulli αλλά το τρίτο όχι.

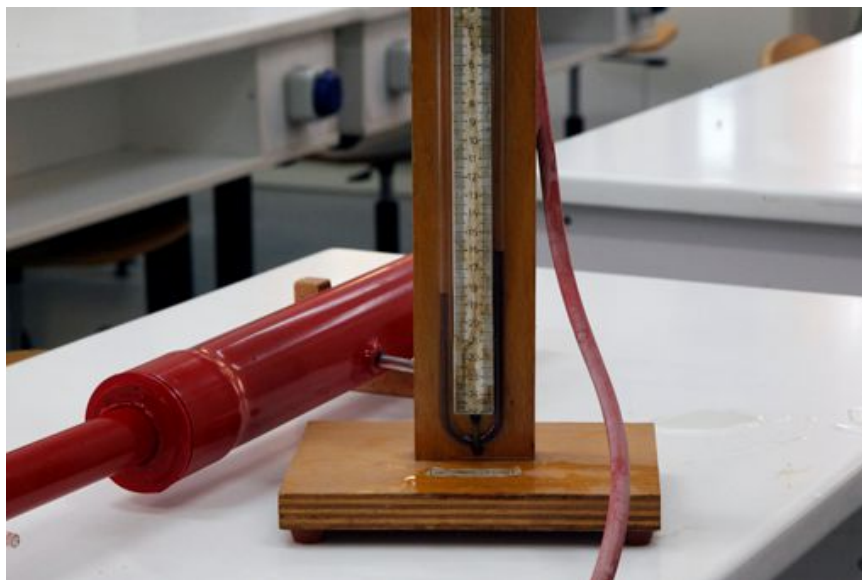


**Εικόνα 8.** Η φλόγα του κεριού δεν επηρεάζεται από τον τρίτο σωλήνα.

Ο αέρας δεν είναι ένα ιδανικό ρευστό (π.χ. δεν είναι ασυμπίεστο). Άρα οι διατάξεις που χρησιμοποιούν αέρα δεν μπορούν να δώσουν αποτελέσματα απολύτως συμβατά με την εξίσωση Bernoulli. Πράγματι, τόσο στη διάταξη που προτείνεται όσο και σε εκείνη της CENCO (όπως φαίνεται στην εικόνα 2), η πίεση μετά τη στένωση είναι μικρότερη από την πίεση πριν τη στένωση, ενώ η εξίσωση Bernoulli προβλέπει πως θα είναι ίσες. Αυτό είναι αποτέλεσμα της εσωτερικής τριβής του αέρα (Αλεξόπουλος & Μαρίνος, 1992) και γίνεται τόσο εντονότερο όσο αυξάνει η ταχύτητα του αέρα με τον οποίο τροφοδοτείται η διάταξη. Πιστεύουμε, ωστόσο, πως αυτό δεν αποτελεί πρόβλημα για τη διδασκαλία, αφενός γιατί σε κάθε περίπτωση γίνεται εμφανής η μείωση της πίεσης στη στένωση, αφετέρου γιατί δίνει στο διδάσκοντα την ευκαιρία να επισημάνει τα όρια του μοντέλου του ιδανικού ρευστού.

Η διάταξη μπορεί θαυμάσια να χρησιμοποιηθεί με νερό αντί για αέρα. Σε αυτήν την περίπτωση η διάταξη πρέπει να στραφεί έτσι ώστε οι οπές να βρίσκονται στο πάνω μέρος του σωλήνα και να συνδεθούν σε αυτές κατακόρυφοι διαφανείς σωλήνες, ώστε να φαίνεται πόσο ψηλά θα φτάσει το νερό εντός τους. Επίσης, πρέπει να εξασφαλιστεί κατάλληλη απομάκρυνση του νερού από τη διάταξη και θα ήταν καλό να χρησιμοποιηθούν λεπτότεροι σωλήνες για τα 3 τμήματα.

Η σύνδεση μανόμετρων στις οπές, αντί για τη χρήση κεριών, επιτρέπει την ποσοτική μελέτη του φαινομένου. Σημειώνεται πως σε περίπτωση απουσίας μανόμετρου, είναι δυνατόν να κατασκευαστεί εύκολα ένα πρόχειρο μανόμετρο. Αρκεί να υπάρχει ένας ευθύγραμμος γυάλινος σωλήνας, ο οποίος θα καμφθεί στο μέσο του με τη βοήθεια ενός λύχνου Bunsen (Lynde, 2003). Στην εικόνα 9 φαίνεται η ένδειξη μανόμετρου που έχει συνδεθεί με την πρώτη οπή στο αριστερό του σκέλος. Η πίεση στην οπή είναι μεγαλύτερη από την ατμοσφαιρική.



**Εικόνα 9.** Το αριστερό σκέλος του μανόμετρου έχει συνδεθεί με την πρώτη οπή.



**Εικόνα 10.**

Στην εικόνα 10 φαίνεται η ένδειξη μανόμετρου που έχει συνδεθεί με τη μεσαία οπή στο αριστερό του σκέλος. Η πίεση στην οπή είναι μικρότερη από την ατμοσφαιρική. Αν το μανόμετρο συνδεθεί με την τελευταία οπή η στάθμη στα δύο σκέλη παραμένει στο ίδιο σημείο, όπως αναμενόταν βάσει των παρατηρήσεων με τα κεριά.

Αξίζει να σημειωθεί πως στην περίπτωση που χρησιμοποιηθούν κεριά αντί για μανόμετρα είναι προφανές πως έχουμε είσοδο ή έξοδο αέρα από τις οπές και κατά συνέπεια τίθεται το ερώτημα αν ισχύει η εξίσωση της συνέχειας και κατά επέκταση η εξίσωση Bernoulli. Για να επιβεβαιωθεί το αν η παρουσία των πλευρικών οπών επηρεάζει μετρήσιμα το φαινόμενο, τοποθετήθηκε ανοικτό μανόμετρο στην οπή της στένωσης και μετρήθηκε η πίεση στο συγκεκριμένο σημείο δύο φορές. Η πρώτη μέτρηση πραγματοποιήθηκε με την οπή στο πρώτο πλατύτερο τμήμα ανοικτή και η δεύτερη μέτρηση με την αντίστοιχη οπή κλειστή. Οι μετρήσεις

και στις δύο περιπτώσεις ήταν ίδιες στα πλαίσια ακρίβειας του μανόμετρου ( $1,6 \pm 0,1 \text{ cm}$  νερού). Μπορεί, λοιπόν, να υποστηριχθεί βάσιμα πως οι σπές δεν επηρεάζουν σημαντικά την εξέλιξη του φαινομένου.

Τέλος, είναι δυνατόν να συνδεθούν η πρώτη και η μεσαία σπή στα δύο σκέλη του μανόμετρου και να ληφθεί μέτρηση για τη διαφορά ανάμεσα στις πιέσεις στα δύο σημεία. Η διαφορά αυτή σχετίζεται με την ταχύτητα στη στένωση και μπορεί να χρησιμοποιηθεί στον υπολογισμό της ταχύτητας άρα και της παροχής, αρκεί να είναι γνωστές οι διατομές των δύο σωλήνων και η πυκνότητα του ρευστού. Στα προηγούμενα στηρίζεται η αρχή λειτουργίας του βεντουρίμετρου, όργανο που χρησιμοποιείται στη μέτρηση της παροχής και στο οποίο αξίζει να γίνει μια αναφορά στην τάξη (Αλεξόπουλος & Μαρίνος, 1992).

### Συμπεράσματα

Η προτεινόμενη διάταξη είναι ιδιαίτερα εύκολη και οικονομική στην κατασκευή ενώ μεταφέρεται και αποθηκεύεται εύκολα. Η χρήση της στη διδασκαλία της εξίσωσης του Bernoulli μπορεί να αποτελέσει ένα χρήσιμο εργαλείο για τον εκπαιδευτικό, τόσο για την υποστήριξη του σχολικού βιβλίου όσο και για την κατάδειξη των ορίων του μοντέλου του ιδανικού ρευστού.

### Αναφορές

- CENCO, Scientific Instruments Laboratory Apparatus and Supplies. (1941). *Catalog J-141*. USA:CENCO.
- Chafee W., Sieradzan A. (1989). Bernoulli Revisited: A simple demonstration. *The Physics Teacher*, April 1989.
- Fowler M. (2006). *The Bernoulli effect*.  
<http://galileo.phys.virginia.edu/classes/152.mf1i.spring02/Bernoulli.htm>. Ημερομηνία προσπέλασης: 23/12/2015.
- Lynde C.(2003). *Glass blowing*. Amsterdam: Fredonia Books
- Αλεξόπουλος Κ., Μαρίνος Δ. (1992). *Γενική Φυσική-Μηχανική*. Αθήνα: Ολυμπία.
- Ιωάννου Α., Ντάνος Γ., Πήττας Α., Ράπτης Σ.(2015). Φυσική Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Επιστημών Γ' Τάξη Γενικού Λυκείου. Αθήνα: ΙΤΥΕ «Διόφαντος».
- Μπισδικιάν Γ., Μολογίδης Τ. (2000). *Κατάλογος οργάνων και συσκευών εργαστηρίου φυσικών επιστημών*. Αθήνα: ΟΕΔΒ.